Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour consulter tous nos sujets d'annales et corrigés du BTS NDRC, veuillez visiter :
coursbtsndrc.fr/annales-sujets-et-corriges

BTS NDRC

Mathématiques

Session 2022 • Code sujet : **22MATGRB2** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques ; 2 en Électrotechnique**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Modélisation et étude du freinage d'un chariot (12 questions) **Page 3**

2. Étude d'un système électrique par transformée de Laplace (9 questions) **Page 7**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 10**

Sujet officiel (PDF) : https://coursbtsndrc.fr/assets/annales/bts-ndrc/E2 - Mathématiques/2022/BTS NDRC - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 2-Sujet.pdf

1. Modélisation et étude du freinage d'un chariot

Un chariot de fête foraine lancé à 20 m·s⁻¹ est ralenti par un système de freinage, et sa vitesse est modélisée en fonction du temps. L'étude mobilise les équations différentielles, les limites et variations, le calcul d'une distance par intégration, le développement limité et la tangente à une courbe.

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

Question 1.a. Résoudre l'équation différentielle homogène y' + 0,8y = 0 sur l'intervalle considéré.

La formule fournie donne les solutions de $y' + ay = 0$ sous la forme $y(t) = ke^{-at}$. Ici, $a = 0{,}8$, donc toutes les solutions sur $[0; +\infty[$ s'écrivent ainsi.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{-0{,}8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 1.b. Pour la fonction g définie par g(t) = 5, vérifier qu'elle est solution de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4.

> Comme $g(t) = 5$, on a $g'(t) = 0$. Alors $g'(t) + 0{,}8g(t) = 0 + 0{,}8 \times 5 = 4$, pour tout t. La fonction vérifie bien l'équation demandée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $g(t) = 5$ est une solution de $y' + 0{,}8y = 4$.

Question 1.c. Déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4.

La solution générale de l'équation complète est la somme d'une solution particulière, ici $g(t) = 5$, et des solutions de l'équation homogène associée.

Ainsi, on ajoute la constante 5 à la famille $ke^{-0{,}8t}$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{-0{,}8t} + 5$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 2. Déterminer la solution f de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4 qui vérifie la condition initiale f(0) = 20.

Dans la solution générale, la condition initiale donne $f(0) = ke^0 + 5 = 20$. Donc $k + 5 = 20$, d'où $k = 15$. En remplaçant k dans l'expression générale, on obtient la solution correspondant à la vitesse initiale du chariot.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$.

Partie B - Étude de la fonction f

Question 1.a. À partir de f(t) = 15e^(-0,8t) + 5, démontrer que la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞ est égale à 5.

Quand $t \to +\infty$, on a $-0,8t \to -\infty$, donc $e^{-0,8t} \to 0$. Par conséquent, dans $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$, le terme exponentiel tend vers zéro et le terme constant reste égal à 5.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 5$.

Question 1.b. Déduire de cette limite que la courbe C admet une asymptote, puis en donner une équation.

La fonction tend vers la valeur finie 5 lorsque t tend vers $+\infty$. La courbe C possède donc une asymptote horizontale de hauteur 5.

✓ RÉPONSE À RETENIR

L'asymptote horizontale à C est $y = 5$.

Question 2. Sachant que f'(t) = -12e^(-0,8t) sur [0 ; +∞[, dresser le tableau de variation de f sur cet intervalle.

Comme $e^{-0,8t} > 0$, on a $f'(t) = -12e^{-0,8t} < 0$ sur l'intervalle. La fonction est donc strictement décroissante. Elle commence à $f(0) = 20$ et tend vers 5.

t	0	$+\infty$
Signe de $f'(t)$	$-$	
Variation de f	20	$\searrow$ 5

✓ RÉPONSE À RETENIR

f décroît de 20 vers 5 sur $[0; +\infty[$.

Question 3. **Déterminer si le système de freinage permet au chariot de s'arrêter.**

Pour tout temps fini, $15e^{-0,8t} > 0$, donc $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5 > 5$. La vitesse ne s'annule jamais. Elle se rapproche de $5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$, sans atteindre zéro.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Non : le chariot ne s'arrête pas dans ce modèle; sa vitesse tend vers $5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

Question 4.a. **Vérifier que F(t) = -18,75e^(-0,8t) + 5t est une primitive de f sur [0 ; +∞[.**

1. On dérive l'exponentielle : $\dfrac{d}{dt}e^{-0,8t} = -0,8e^{-0,8t}$.
2. Ainsi, $F'(t) = (-18,75)(-0,8)e^{-0,8t} + 5 = 15e^{-0,8t} + 5 = f(t)$.

Donc F est une primitive de f.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $F'(t) = f(t)$: F est bien une primitive de f.

Question 4.b. **Sachant que la distance parcourue entre deux instants est l'intégrale de la vitesse, calculer la distance exacte parcourue entre $t_0 = 0$ et $t_1 = 1$, puis donner une valeur arrondie au centimètre.**

La distance vaut $d = F(1) - F(0)$. En utilisant la primitive donnée :

$$d = (-18,75e^{-0,8} + 5) - (-18,75) = 23,75 - 18,75e^{-0,8}\ \mathrm{m}.$$

À l'arrondi au centimètre, cela donne $15,33\ \mathrm{m}$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $d = 23,75 - 18,75e^{-0,8}\ \mathrm{m} \approx 15,33\ \mathrm{m}$.

Partie C - Étude locale

Question 1. **Choisir, parmi les propositions, le développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de zéro. Une seule réponse est exacte, et aucune justification n'est demandée.**

Le logiciel donne le polynôme $20 - 12t + \dfrac{24}{5}t^2$. Pour un développement limité à l'ordre 2, le reste s'écrit $t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$. C'est donc la troisième proposition du sujet.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(t) = 20 - 12t + \dfrac{24}{5}t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$: troisième proposition.

Question 2. Donner une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

L'équation de la tangente au point d'abscisse 0 est $y = f(0) + f'(0)t$. On a $f(0) = 20$ et, d'après la dérivée donnée, $f'(0) = -12$. En substituant ces valeurs, on obtient l'équation demandée.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $T : y = 20 - 12t$.

2. Étude d'un système électrique par transformée de Laplace

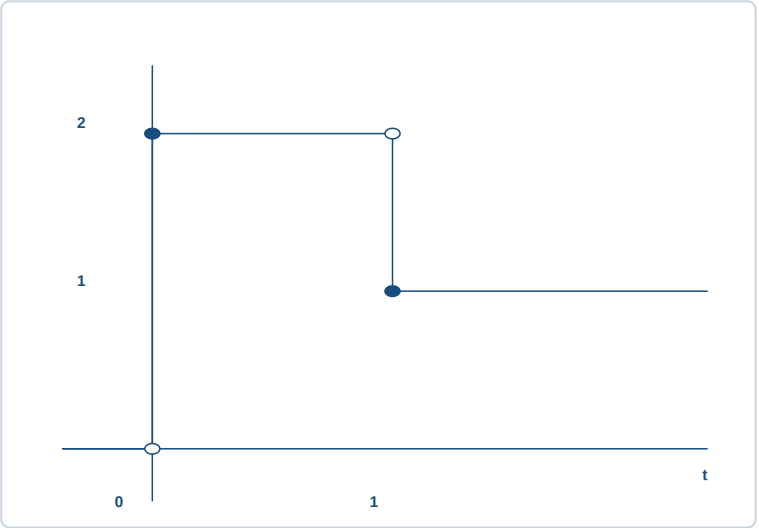
Un système électrique entrée-sortie reçoit le signal causal e(t) = 2U(t) - U(t - 1) et possède la fonction de transfert H(p) = 1/(p + 1). Il faut représenter le signal d'entrée, déterminer les expressions de Laplace des signaux, puis obtenir et étudier le signal de sortie.

Partie A - Signal d'entrée

Question 1. Tracer sur le document-réponse à rendre avec la copie la courbe représentative de la fonction e(t).

Comme $e(t) = 2U(t) - U(t-1)$, le signal vaut 0 avant $t = 0$, puis 2 jusqu'à $t = 1$. À partir de $t = 1$, il vaut 1. Les valeurs aux sauts tiennent compte de $U(0) = 1$: le point en $t = 0$ est à la hauteur 2 et celui en $t = 1$ à la hauteur 1.

Signal d'entrée e(t)



✓ RÉPONSE À RETENIR

$e(t) = 0$ si $t < 0$, $e(t) = 2$ si $0 \leq t < 1$, et $e(t) = 1$ si $t \geq 1$.

Question 2. Déterminer la transformée de Laplace E(p) du signal d'entrée.

Par linéarité et d'après le formulaire, $\mathcal{L}(U(t)) = 1/p$ et $\mathcal{L}(U(t-1)) = e^{-p}/p$. On transforme les deux termes de $e(t) = 2U(t) - U(t-1)$, en conservant le coefficient 2 du premier échelon. Ainsi, $E(p) = 2/p - e^{-p}/p$, que l'on peut regrouper au même dénominateur.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$$E(p) = \frac{2 - e^{-p}}{p}.$$

Partie B - Signal de sortie

Question 1. Démontrer que S(p) = 2/[p(p + 1)] - [1/[p(p + 1)]]e^(-p).

La relation entrée-sortie donne $S(p) = H(p)E(p)$. En substituant $H(p) = 1/(p+1)$ et $E(p) = (2 - e^{-p})/p$, puis en distribuant le facteur $1/(p+1)$, on obtient la somme de deux termes. Le facteur e^{-p} correspond au retard d'une unité du second échelon.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $$S(p) = \frac{2}{p(p+1)} - \frac{e^{-p}}{p(p+1)}.$$

Question 2. Vérifier que 1/[p(p + 1)] = 1/p - 1/(p + 1).

Mettons le membre de droite au dénominateur commun $p(p+1)$: $\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} = \frac{p+1-p}{p(p+1)}$. Le numérateur se réduit à 1, ce qui donne le membre de gauche. L'égalité est vérifiée pour les valeurs de p où les fractions sont définies, soit $p \neq 0$ et $p \neq -1$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $$\frac{1}{p(p+1)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}.$$

Question 3. Donner les transformées de Laplace inverses de 1/p, 1/(p + 1), (1/p)e^(-p) et [1/(p + 1)]e^(-p), en utilisant le formulaire fourni.

Le formulaire associe $1/p$ à l'échelon unité et $1/(p+1)$ à $e^{-t}U(t)$. La multiplication d'une transformée par e^{-p} retarde le signal d'une unité : $f(t)$ devient $f(t-1)U(t-1)$. On applique cette propriété aux deux transformées retardées demandées.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Dans l'ordre demandé : $U(t)$, $e^{-t}U(t)$, $U(t-1)$, $e^{-(t-1)}U(t-1)$.

Question 4. Déduire des résultats précédents l'expression de s(t) sur l'intervalle [0 ; 1[.

En utilisant la décomposition précédente, $S(p) = 2(1/p - 1/(p+1)) - e^{-p}(1/p - 1/(p+1))$. Les deux termes retardés sont nuls sur $[0;1[$, puisque $U(t-1) = 0$ pour $t < 1$. Il ne reste donc que l'inverse de $2(1/p - 1/(p+1))$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Pour $0 \leq t < 1$, $s(t) = 2(1 - e^{-t})$.

Question 5.a. **Sachant que s(t) = (e - 2)e^(-t) + 1 sur [1 ; +∞[, calculer s(1), d'abord sous forme exacte puis sous forme approchée au dixième.**

On évalue la formule valable pour $t \geq 1$ en $t = 1$: $s(1) = (e-2)e^{-1} + 1$. Comme $(e-2)/e = 1 - 2/e$, cela se simplifie en $2 - 2/e$. À la calculatrice, cette valeur vaut environ $1{,}264$, soit $1{,}3$ au dixième.

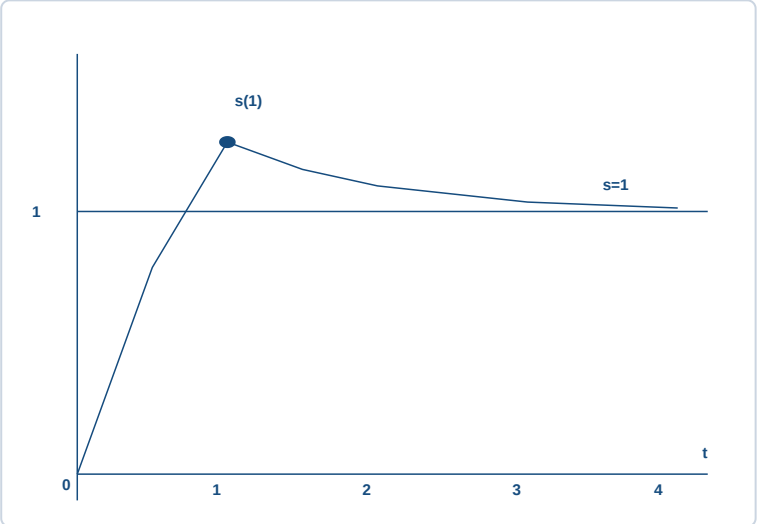
✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$s(1) = 2 - \dfrac{2}{e} \approx 1{,}3.$

Question 5.b. **Compléter sur le document-réponse à rendre avec la copie la courbe représentative de la fonction s.**

Sur $[0;1[$, $s(t) = 2(1 - e^{-t})$ croît de 0 à $2 - 2/e$. Pour $t \geq 1$, la formule $s(t) = (e-2)e^{-t} + 1$ décroît vers 1. Les deux expressions coïncident en $t = 1$: la courbe est continue et atteint son maximum en ce point. L'asymptote horizontale est $s = 1$, approchée par au-dessus.

Courbe du signal de sortie s(t)



✓ **RÉPONSE À RETENIR**

La courbe croît jusqu'à $s(1) = 2 - 2/e \approx 1{,}3$, puis décroît vers l'asymptote $s = 1$.

Question 5.c. **Donner la limite de la fonction s(t) lorsque t tend vers +∞.**

Pour $t \geq 1$, on a $s(t) = (e-2)e^{-t} + 1$. Lorsque t tend vers $+\infty$, e^{-t} tend vers 0. Le terme exponentiel disparaît donc à la limite et il reste la constante 1.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$\lim\limits_{t \to +\infty} s(t) = 1.$

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : Cette épreuve de mathématiques du BTS, session 2022, porte le code 22MATGRB2 et dure deux heures. Le coefficient est de 1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques et de 2 en Électrotechnique. Les deux exercices étudient le freinage d'un chariot et un système électrique, en évaluant équations différentielles, analyse, intégration et transformée de Laplace.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour y' + ay = 0, les solutions sont de la forme y(t) = ke^(-at).
- Si f(t) tend vers L quand t tend vers +∞, sa courbe admet l'asymptote horizontale d'équation y = L.
- La distance parcourue entre t_0 et t_1 est l'intégrale de la vitesse sur $[t_0 ; t_1]$.
- La transformée de Laplace de f(t - a)U(t - a) est F(p)e^(-ap).

Points de vigilance & attentes du jury

- Vérifier le signe de l'exposant dans la résolution de l'équation différentielle, puis appliquer la condition initiale.
- Distinguer une vitesse qui tend vers une valeur de zéro d'une vitesse qui atteint zéro à un instant fini.
- Pour la distance, évaluer la primitive aux deux bornes et convertir l'arrondi demandé au centimètre.
- Pour le signal retardé, appliquer le facteur e^(-ap) et repérer correctement les changements aux instants 0 et 1.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment trouver la solution de l'équation différentielle avec la vitesse initiale ?

Résolvez l'équation homogène, puis ajoutez une solution particulière de l'équation complète. Utilisez ensuite f(0) = 20 pour déterminer la constante et vérifiez que la fonction obtenue satisfait l'équation.

Q : Comment utiliser le décalage temporel dans une transformée de Laplace ?

Un signal retardé f(t - a)U(t - a) a pour transformée F(p)e^(-ap). Repérez le retard a, appliquez cette propriété au signal décalé, puis utilisez les transformées inverses et le formulaire fourni.

Q : Comment répartir son temps pendant cette épreuve de deux heures ?

Les deux exercices valent chacun 10 points et les trois parties du premier peuvent être traitées indépendamment. Répartissez le temps entre les exercices, en réservant quelques minutes à la vérification des calculs, des unités et des tracés.

Q : Quels critères de présentation et de précision faut-il respecter ?

Le sujet demande notamment des expressions exactes, des arrondis au centimètre ou au dixième selon la question, et des tracés sur le document-réponse. Il faut indiquer clairement les étapes de calcul et respecter les intervalles et unités.

Sujet officiel associé (PDF) : https://coursbtsndrc.fr/assets/annales/bts-ndrc/E2 - Mathématiques/2022/BTS NDRC - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 2-Sujet.pdf
Ressources BTS Négociation et Digitalisation de la Relation Client : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.